保険数理と金融数理の交わりについて
（OLIS-北海道大学保険フォーラム）

関根 順
大阪大学大学院基礎工学研究科
大阪大学数理・データ科学教育研究センター

2017 年 10 月 14 日

Plan

§.0　なぜ私が？

§.1　個人的な保険数理との関わり

§.2　保険数理 vs. 金融数理

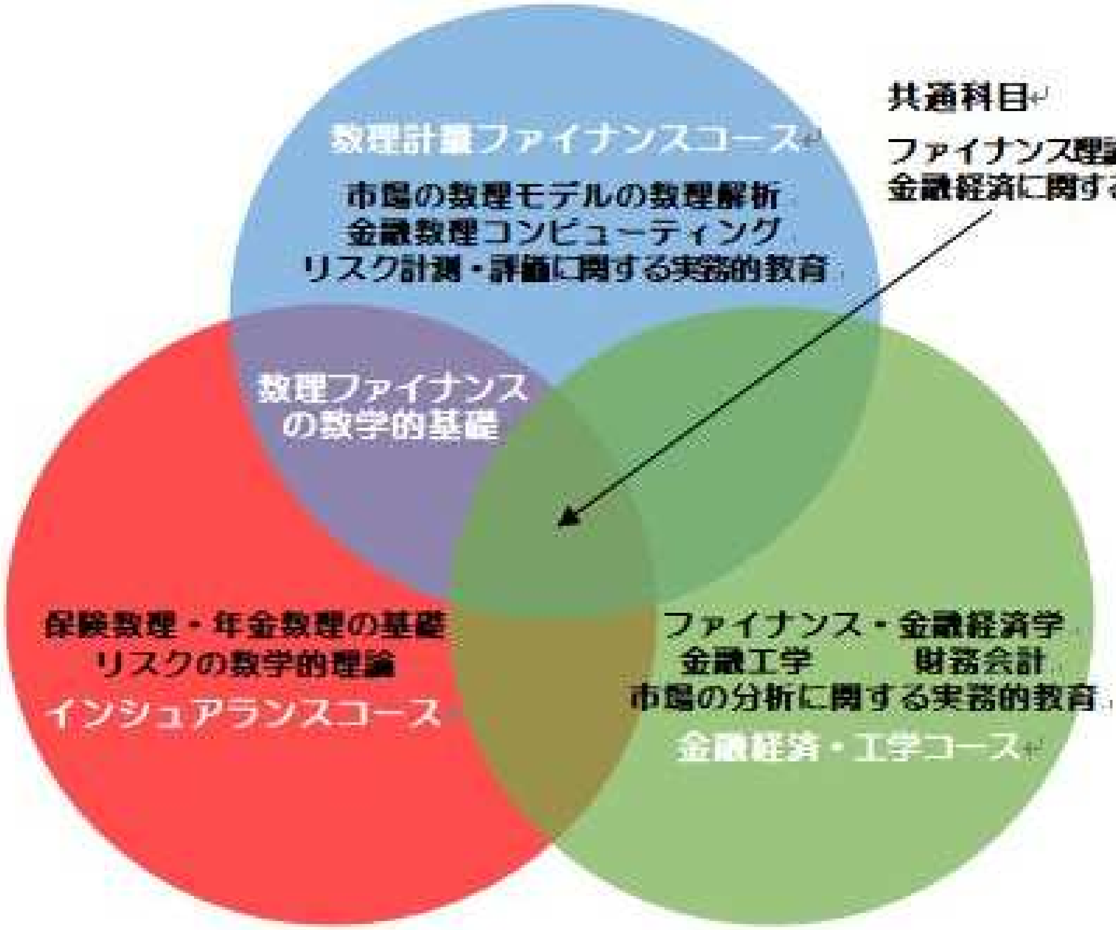
§.3　リスクモデルと (金融市場での) 最適運用

§0. なぜ私が?

なぜ私が？

- 専門：数理ファイナンス（金融数理）
- 兼任：大阪大学数理・データ科学教育研究センター(MMDS: Center for Mathematical Modeling and Data Science, Osaka University)
  - 金融保険部門: 大学院副専攻プログラムを提供
    - 数理計量ファイナンスコース
    - 金融経済・工学コース
    - インシュアランスコース
  - 数理モデリング部門：3 種の副プログラムを提供
  - データ科学部門：7 種の副プログラムを提供

MMDS: 金融・保険に関するプログラム



■３つのコースの教育内容ー教育プログラム体系

研究室の学生

- 修士課程：ここ数年, 金融志望, 保険（アクチュアリー採用）志望の学生が約半々に $+\alpha$ で研究志向学生
  - アクチュアリー資格の安定感？
    （年収 100,000＄以上：2016 年保険フォーラム at 大阪にて）
  - 縦の繋がり（先輩, OB/OG）？
  - 横の繋がり（自主勉強会：阪大内, 関西圏）
- 保険数理と金融数理両方学んでおいてほしい
- 「大人」の学問領域：学際的, 複合的
  - 博士（後期）過程を修了して保険業界で活躍する人材輩出

§1. 保険数理との（個人的）関わり

ASTIN(Actuarial Studies in Non-Life Insurance), AFIR(Actuarial Approach for Financial Risks) の世界大会

- Jun Sekine: "Quantile hedging for defaultable securities in an incomplete market."

$$\max_{\pi} \mathbb{P}\left(F \geq X_T^{x,\pi}\right)$$

  - $F := F_1 1_{\{\tau > T\}} + F_2 1_{\{\tau \leq T\}}$,
    - $T > 0$: 満期, τ: デフォルト時刻,
    - F_1: デフォルトが起きないときの満期キャッシュフロー,
    - $F_2 (\leq F_1)$: デフォルトが起きたときの満期キャッシュフロー,
  - $X_t^{x,\pi} = x + \int_0^t \pi_s dS_s$: ヘッジポートフォリオの時刻 t での価値.
  - 非完備市場での価格付け・ヘッジ.
- (equilty-linked) life-insurance contract への応用 (Melnikov et al., 2005, 2006).

- もぐりで聴講していた.
  - Gerber, Shiu, Boyle, Bühlemann, Engle, Wang, Artzner, Filipovic, Hernandez-Hernandez, ...

ASTIN/AFIR 2005 (Zürich)

- もぐりで聴講していた.
  - Gerber, Shiu, Boyle, Bühlemann, Engle, Wang, Artzner, Filipovic, Hernandez-Hernandez, ...
- 当時大阪では金融保険教育研究センター設立に向けた準備中...
  数理ファイナンスにも通じた保険数理専門家 (suggested by F. Delbaen, ETH Zürich):
  - H. U. Gerber (Lausanne), E. S. W. Shiu (Iowa), P. Boyle (Warterloo), D. Dufresne (Melbourne), ...

- もぐりで聴講していた.
  - Gerber, Shiu, Boyle, Bühlemann, Engle, Wang, Artzner, Filipovic, Hernandez-Hernandez, ...
- 当時大阪では金融保険教育研究センター設立に向けた準備中...
  数理ファイナンスにも通じた保険数理専門家 (suggested by F. Delbaen, ETH Zürich):
  - H. U. Gerber (Lausanne), E. S. W. Shiu (Iowa), P. Boyle (Warterloo), D. Dufresne (Melbourne), ...

例 : Dufresne's formula

$$\int_0^\infty \exp\{2(W_t - kt)\}\,dt \underset{\text{law}}{=} \frac{1}{2G^{(k)}}, \quad \mathbb{P}\left(G^{(k)} \le c\right) := \int_0^c \frac{x^{k-1}e^{-x}}{\Gamma(k)}dx,$$

($k > 0$, $(W_t)_{t\ge 0}$: Brown 運動).

Historical View (1; borrowed from P. Boyle)

Actuarial science: The early years

- Profession to serve a public purpose.
- Started with Equitable 1762
- Actuaries computed premiums
- Estimated reserves
- Assessment of solvency
- Concepts used
  1. Basic probability
  2. Compound interest
- Finance ideas used were state of the art at the time

How we drifted apart

- Big advances in finance
  1. Bachelier(1900)
  2. Markowitz(1952)
  3. Sharpe Linter CAPM(1960's)
  4. Black Scholes Merton(1973)
- In the beginning actuaries tended to ignore these developments
- However new products were introduced that needed these ideas
- Financial economics now generally accepted as useful by the profession
- Hans Bühlmann's Actuaries of the third kind 1987 Astin editorial
- Struggle still goes on in some professional actuarial bodies

$\Rightarrow$ Signs of Convergence

§2. Finance & Insurance

- マーケットの特徴
  - F: 効率的セカンダリーマーケット（= 取引所）
  - I: セカンダリーマーケットは無い（転売は無い）
- 市場の完備性
  - F: 完備性をしばしば仮定（できる）.
  - I: 本質的に非完備.
- ヘッジング・リスク定量化
  - F: 複製ポートフォリオを組んでリスクを相殺,
  - F&I: リスクに備えて資本 (準備金) を積む.
- 生命保険, 年金 : 超長期契約

- 集合的リスク:

$$S := \sum_{i=1}^{N} U_i, \quad S_t := \sum_{i=1}^{N_t} U_i,$$

  - $(U_i)_{i=1}^{\infty}$, 独立同分布確率変数列：クレーム額のモデル,
  - $(N_t)_{t\geq 0}$: Poisson 過程（計数過程; U_i とは独立, 強度パラメータ λ）：クレーム発生件数のモデル

- 大数の法則：

$$\frac{S}{N} \to \mathbb{E}[U_1] \quad \text{as } N \to \infty,$$
$$\frac{S_t}{t} \to \mathbb{E}[N_1]\mathbb{E}[U_1] = \lambda\mathbb{E}[U_1] \quad \text{as } t \to \infty.$$

$\therefore\ S \approx N\mathbb{E}[U_1]$ (as $N \gg 1$), $S_t \approx t\lambda\mathbb{E}[U_1]$ (as $t \gg 1$).

Insurance Premium Principles の例

1. 純保険料 : $p = \mathbb{E}[U_1]$
2. 期待値原理 : $p = (1+\theta)\mathbb{E}[U_1]$, ($\theta\mathbb{E}[U_1]$: 付加保険料),
3. 標準偏差原理 : $p = \mathbb{E}[U_1] + \alpha\sqrt{\mathbb{V}[U_1]}$:
4. 分散原理 : $p = \mathbb{E}[U_1] + \beta\mathbb{V}[U_1]$:
5. 効用無差別原理 : $\mathbb{E}\left[u\left(p - U_1\right)\right] = u(0)$, u: 効用関数 (e.g., $u' > 0$, $u'' < 0$).
6. 指数原理 : $p_\gamma = \dfrac{1}{\gamma}\log\mathbb{E}\left[e^{\gamma U_1}\right]$ ($\gamma > 0$: リスク回避パラメータ)
   - $\lim_{\gamma\to 0} p_\gamma = \mathbb{E}[U_1]$, $\lim_{\gamma\to\infty} p_\gamma = \sup_\omega U_1(\omega)$.

Insurance Premium Principles の例

1. 純保険料 : $p = \mathbb{E}[U_1]$
2. 期待値原理 : $p = (1+\theta)\mathbb{E}[U_1]$, ($\theta\mathbb{E}[U_1]$: 付加保険料),
3. 標準偏差原理 : $p = \mathbb{E}[U_1] + \alpha\sqrt{\mathbb{V}[U_1]}$:
4. 分散原理 : $p = \mathbb{E}[U_1] + \beta\mathbb{V}[U_1]$:
5. 効用無差別原理 : $\mathbb{E}\left[u\left(p - U_1\right)\right] = u(0)$, u: 効用関数 (e.g., $u' > 0$, $u'' < 0$).
6. 指数原理 : $p_\gamma = \dfrac{1}{\gamma}\log\mathbb{E}\left[e^{\gamma U_1}\right]$ ($\gamma > 0$: リスク回避パラメータ)
   - $\lim_{\gamma\to 0} p_\gamma = \mathbb{E}[U_1]$, $\lim_{\gamma\to\infty} p_\gamma = \sup_\omega U_1(\omega)$.

6 は 5 において指数効用 $u(x) := \frac{1-e^{-\gamma x}}{\gamma}$ を採用したもの.

$$\mathbb{E}\left[u\left(p - U_1\right)\right] = \frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma p}\mathbb{E}[e^{\gamma U_1}]\right) = 0$$

- $(W_t)_{0\le t\le T}$: Brown 運動,
- $F := f\left((W_t)_{0\le t\le T}\right)$, $(\mathbb{E}[F^2] < \infty)$.

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T \phi_t^F \, dW_t$$

を満たす適合過程 $(\phi_t^F)_{0\le t\le T}$ $\left(\mathbb{E}\left[\int_0^T (\phi_t^F)^2 dt\right] < \infty\right)$ が一意に定まる.

- $(W_t)_{0\le t\le T}$: Brown 運動,
- $F := f\left((W_t)_{0\le t\le T}\right)$, ($\mathbb{E}[F^2] < \infty$).

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T \phi_t^F \, dW_t$$

を満たす適合過程 $(\phi_t^F)_{0\le t\le T}$ ($\mathbb{E}\left[\int_0^T (\phi_t^F)^2 dt\right] < \infty$) が一意に定まる.

ここで

$$\int_0^T \phi_t^F \, dW_t \approx \sum_{i=1}^N \phi_{t_i}^F (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \quad \text{as } N \gg 1$$

$(t_i := iT/N)$.

No Arbitrage Price(= Replication Cost)

- $dS_t = a(t, S_t)dW_t + b(t, S_t)dt$: 確率微分方程式（株価モデル），すなわち $\varDelta \ll 1$ のとき

$$S_{t+\varDelta} - S_t = a(t, S_t)(W_{t+\varDelta} - W_t) + b(t, S_t)\varDelta, \quad W_{t+\varDelta} - W_t \sim N(0, \varDelta).$$

- $F := f\left((S_t)_{0\le t\le T}\right)$: 株価の関数 (金融派生商品).
- $\mathbb{Q}$: 同値マルチンゲール測度（リスク中立確率）.
- 複製:

$$F = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F] + \int_0^T \phi_t^F \, dS_t$$

を満たす適合過程 $(\phi_t^F)_{0\le t\le T}$ が一意に定まる.

  - (右辺)=「元手 $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F]$」+「動的な運用 $(\phi_t^F)_{0\le t\le T}$ による累積収益」
  - $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F]$=「無裁定価格」
  - $(\phi_t^F)_{0\le t\le T}$: ヘッジ戦略

- $F := f\left((S_t)_{0\le t\le T}, Z\right)$, ($Z$: 株価変動リスクとは異なるリスク) の場合複製はできない（部分的に相殺できるリスクはあるだろうが…)

$$F \neq C + \int_0^T \phi_t dS_t, \quad {}^\forall(C,\phi).$$

- 金融リスク管理では, 相殺できないリスク X(損失額, 確率変数) をリスク尺度 ρ を用いて計測, リスクをカバーするために必要な資本を積む.

例 1)　Value at Risk.　$\rho(X) = \mathrm{VaR}_\alpha(X)$ (e.g. $\alpha = 0.99$), ただし

$$\mathbb{P}\left(X \ge \mathrm{VaR}_\alpha(X)\right) = \alpha.$$

例 2)　Conditional Value at Risk. $\rho(X) = \mathrm{CVaR}_\alpha(X)$, ただし

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X) = \mathbb{E}[X|X \ge \mathrm{VaR}_\alpha(X)].$$

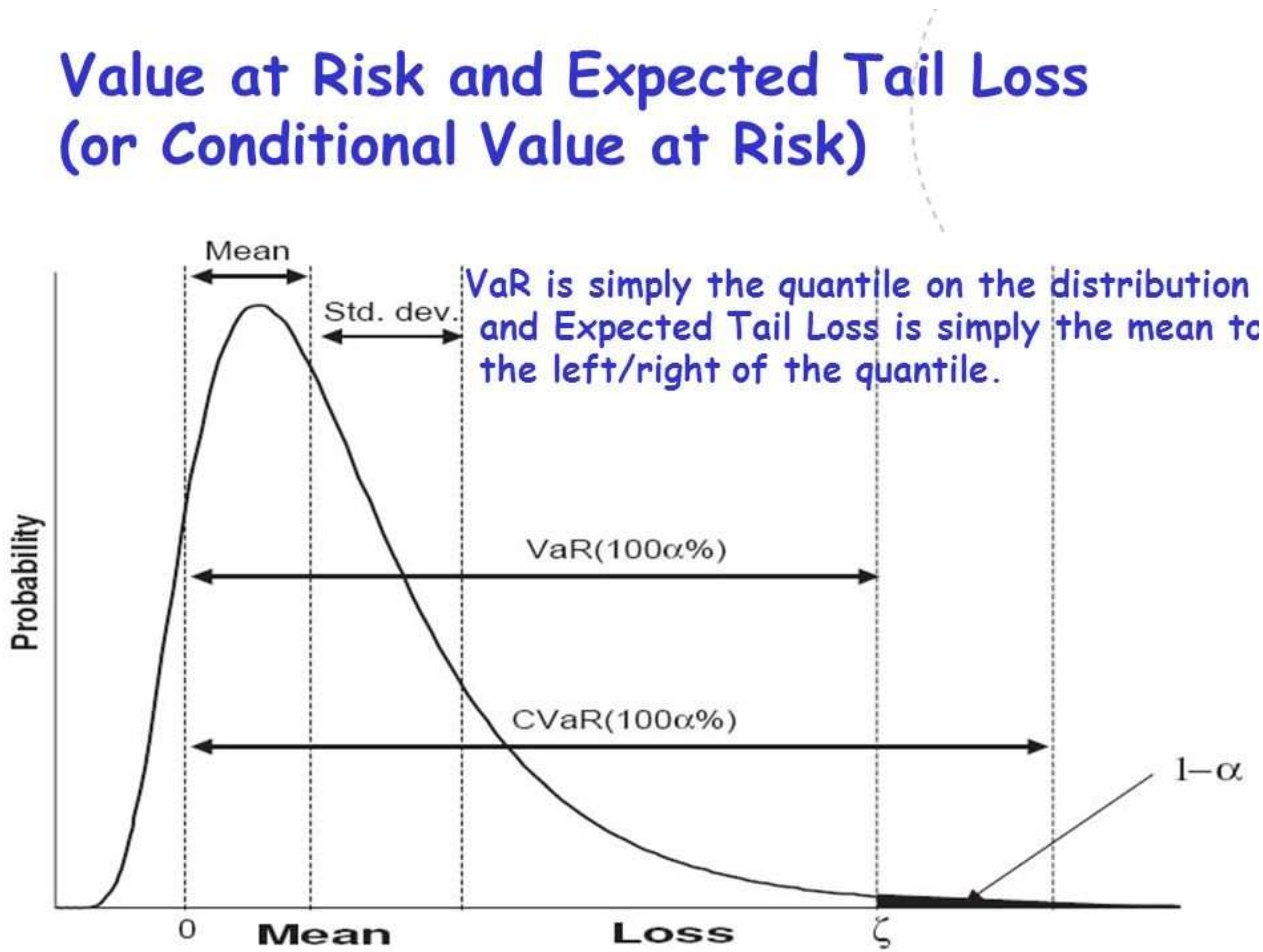


Figure 1: Warren Lester (NUST) 作成による

Guaranteed Annuity Options(1)

- 参考文献 : P. Boyle and M. Hardy (2003): “Guaranteed Annuity Options”, Astin Bulletin, **33** (2).

- 英国保険会社で盛んに発行された “複雑” な超長期オプション ('70s-'80s)

$$F := S_T \max\left(\frac{a_{65}(T)}{g} - 1, 0\right) \quad : \text{ 時刻 } T \text{ に購入者に支払われる金額.}$$

  - $(S_t)_{t\geq 0}$: 株式ポートフォリオ価値過程（確率過程）
  - $a_{65}(t)$: 65 歳の人が受け取るべき年金の時刻 t での価値（確率過程）
    - 金利（割引率）や死亡率の関数で表される.
    - 金利 $\searrow \Rightarrow a_{65} \nearrow$, 死亡率 $\searrow \Rightarrow a_{65} \nearrow$.
  - g: あらかじめ決められた変換レート（定数）.
  - T: 満期（20 年, 30 年）.

Guaranteed Annuity Options(2)

- 非完備市場での価格付け問題.

Guaranteed Annuity Options(2)

- 非完備市場での価格付け問題.
- ファイナンス理論を援用すると...

$$p = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[D_T F] \quad : \text{“fair” price of GAO (??)}$$

($\mathbb{Q}$: “ある” リスク中立確率).

Guaranteed Annuity Options(2)

- 非完備市場での価格付け問題.
- ファイナンス理論を援用すると...

$$p = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D_T F\right] \quad : \text{ “fair” price of GAO (??)}$$

(ℚ: “ある” リスク中立確率).

- 発行当時は高金利状態であったこともあり, $p \approx 0$ で発行されていた.
(モデルのミススペシフィケーション！)

Guaranteed Annuity Options(2)

- 非完備市場での価格付け問題.
- ファイナンス理論を援用すると...

$$p = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D_T F\right] \quad : \text{“fair” price of GAO (??)}$$

(ℚ: “ある” リスク中立確率).

- 発行当時は高金利状態であったこともあり, $p \approx 0$ で発行されていた.
(モデルのミススペシフィケーション！)
- その後 90 年代に入り株式市場の活況化（！）, 金利の下落（！）, 死亡率の改善（！）

Guaranteed Annuity Options(2)

- 非完備市場での価格付け問題.
- ファイナンス理論を援用すると…

$$p = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D_T F\right] \quad : \text{“fair” price of GAO (??)}$$

($\mathbb{Q}$: “ある” リスク中立確率).

- 発行当時は高金利状態であったこともあり, $p \approx 0$ で発行されていた.
(モデルのミススペシフィケーション！)
- その後 90 年代に入り株式市場の活況化（！）, 金利の下落（！）, 死亡率の改善（！）
- ほとんどヘッジできない金融・保険商品を価格 0 で発行していた (!!!).

Guaranteed Annuity Options(2)

- 非完備市場での価格付け問題.
- ファイナンス理論を援用すると...

$$p = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[D_T F] \quad : \text{“fair” price of GAO (??)}$$

(ℚ: “ある” リスク中立確率).

- 発行当時は高金利状態であったこともあり, $p \approx 0$ で発行されていた.
(モデルのミススペシフィケーション！)
- その後 90 年代に入り株式市場の活況化（！）, 金利の下落（！）, 死亡率の改善（！）
- ほとんどヘッジできない金融・保険商品を価格 0 で発行していた (!!!).
- （超）長期予測（：株式市場, 金利, 死亡率 etc.）は大変難しい (!!!)
  - 過去データの分析から予測できない！
  - “ロバスト” な予測手法...
  - 超長期割引率の問題：環境経済学などでも...

§3. リスクモデルと (金融市場での) 最適運用

Cramer-Lundberg モデル

$$X_t^x := x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} U_i, \quad t \geq 0,$$

- $x(\geq 0)$: 準備金, $c(> 0)$: 保険料,
- $(N_t)_{t\geq 0}$: Poisson 過程（計数過程; クレームの頻度を表す）, 強度パラメータ $\lambda(> 0)$,
- $(U_i)_{i=1}^{\infty}$: 独立同分布確率変数列, クレーム額の大きさを表す. $U_i \geq 0$, $U_i \sim \nu$, $\mathbb{E}[U_i] = \mu(< \infty)$.

$$\tau_x := \inf\{t > 0; X_t^x < 0\} \quad : \text{ruin time}$$

- $\psi(x,t) := \mathbb{P}(\tau_x \leq t)$, $\psi(x) := \mathbb{P}(\tau_x < \infty)$: 破産確率,
- $\phi(x,t) := 1 - \psi(x,t)$, $\phi(x) := 1 - \psi(x)$: 生存確率.

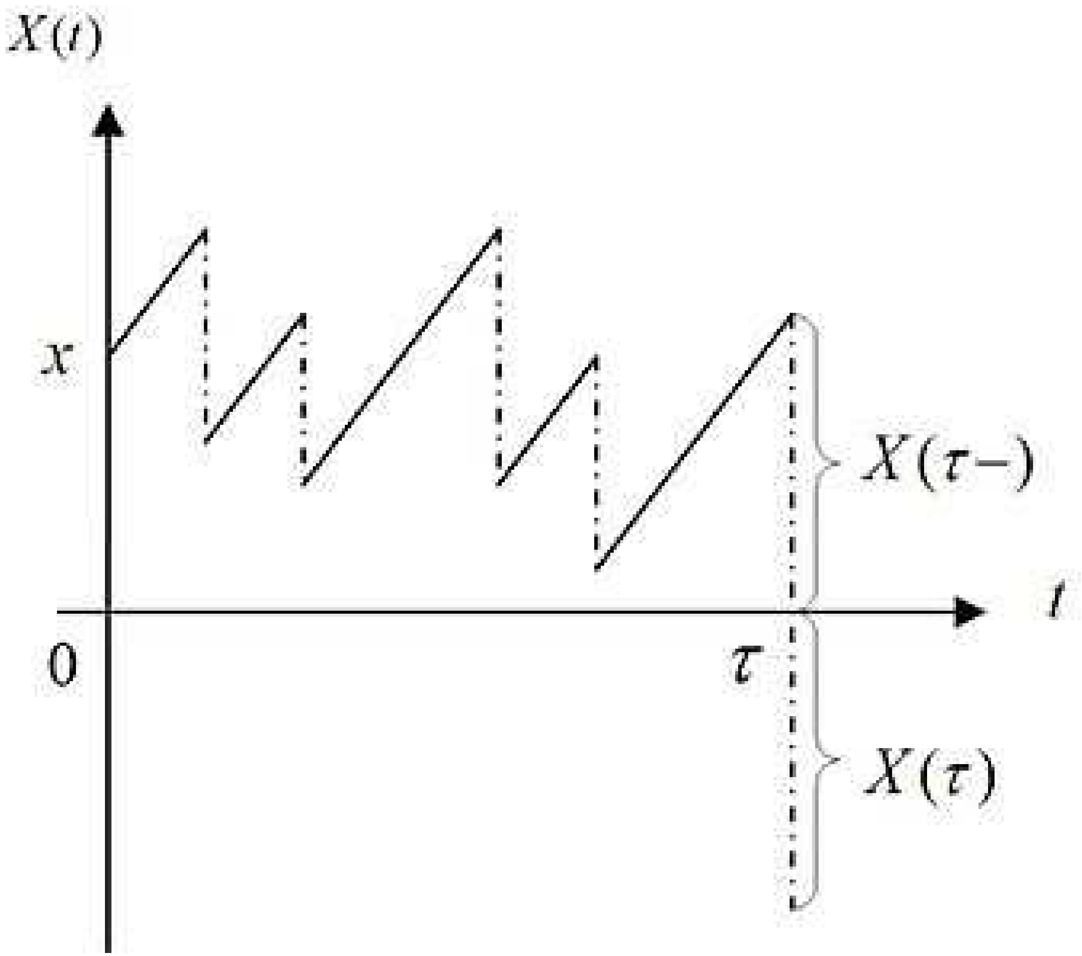


Figure 2: Wikipedia より

$\phi \in C(\mathbb{R}_+)$, ${}^\exists\phi'_+$, ${}^\exists\phi'_-$. 更に

$$
\begin{aligned}
c\phi'_+(x) =& \lambda\phi(x) - \lambda\int_0^x \phi(x-y)d\nu(y), \quad x \geq 0, \\
c\phi'_-(x) =& \lambda\phi(x) - \lambda\int_0^{x-} \phi(x-y)d\nu(y), \quad x > 0.
\end{aligned}
$$

仮定： (a) $c > \lambda\mu$.

(b) $\lambda\left\{M(\hat{R}) - 1\right\} = c\hat{R}$, $M(r) := \mathbb{E}[e^{rY_i}]$ を満たす $\hat{R} > 0$ が存在.

$\hat{\mu} := \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty y e^{\hat{R}y}\,(1 - \nu(y))\,dy$ として以下が成立.

i) If $\hat{\mu} < \infty$, then,

$$\lim_{x\to\infty} \psi(x)e^{\hat{R}x} = \frac{c - \lambda\mu}{c\hat{R}\hat{\mu}},$$

and hence,

$$\psi(x) \sim \frac{c - \lambda\mu}{c\hat{R}\hat{\mu}} e^{-\hat{R}x} \quad \text{as } x \to \infty.$$

ii) If $\hat{\mu} = \infty$, then, $\lim_{x\to\infty} \psi(x)e^{\hat{R}x} = 0$.

ϕ の微分可能性

$$X_t^x = x + \int_0^t (rX_s^x + c)\,ds - \sum_{i=1}^{N_t} U_i.$$

$U_i \sim \nu$, ν: 2 回微分可能, s.t. $|\nu''|$: bdd and integrable on $\mathbb{R}_+$.
このとき $\phi \in C^{1,1}(\mathbb{R}_+^2)$ で

$$\partial_t\phi(t,x) - (rx+c)\partial_x\phi(t,x) + \lambda\phi(t,x) - \lambda\int_0^x \phi(x-y,t)d\nu(y) = 0,$$

$$\phi(x,0) = 1, \qquad \lim_{x\to\infty}\phi(x,t) = 1.$$

- ν が密度関数を持たないときには ϕ は微分可能とは限らない（反例沢山あり）．
- 参考文献：“Ruin Probabilities”. Y. Mishura and O. Ragulina (2016), *Elsevier*.

- 村上 大樹: "確率ファクターモデルを用いた保険会社の最適運用問題", (大阪大学大学院基礎工学研究科修士論文, 2017.3)
- 関連論文：
  - B. Fernández, D. Hernández-Hernández, A. Meda, and P. Saavedra (2008): "An optimal investment strategy with maximal risk aversion and its ruin probability." *Mathematical Methods of Operations Research*, **68**(1),
  - H. Hata and K. Yasuda (2017): Expected exponential utility maximization of insurers with a linear gaussian stochastic factor model." To appear in *Scandinavian Actuarial Journal*.

設定

保険会社のリスク過程：

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} U_i + \int_0^t \left\{ \sum_{i=1}^{n} \pi_u^i \frac{dS_u^i}{S_u^i} + \left(X_u - \sum_{i=1}^{n} \pi_t^i \right) r dt \right\},$$

ここで

$$\begin{aligned} dS_t^i =& S_t^i \left\{ \mu_i(Y_t)dt + \sigma_i dW_t \right\}, \quad S_0 > 0, \\ dY_t =& b(Y_t)dt + a dW_t, \quad Y_0 = y \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

- c: 保険料, r: 安全運用金利,
- N: Poisson 過程, $(U_i)_{i=1}^{\infty}$: iidrvs, W: Brown 運動,
- $S^1, \ldots, S^n$: n 種類（銘柄）の危険資産価格過程,
- Y: ファクター（経済要因）過程,
- $\mu(y) := \mu_0 + \mu_1 y$, $b(y) := b_0 + b_1 y$: 線形ガウスファクターモデル,
- $\pi := (pi^1, \ldots, \pi^n)$: n 種類危険資産の運用戦略,

(1) 最適運用問題：$u(x) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x})$ に対して

$$V(T, x, y; c) := \sup_{\pi} \mathbb{E}\left[u(X_T^{x,c,\pi})\right]$$

を解く：最適期待効用値や最適運用戦略 $\hat{\pi}$ を求める.

(2) 効用無差別の見地から保険料再算出：

$$V(T, x, y; \hat{c}) = \mathbb{E}\left[u(X_T^{x,c,0})\right].$$

(3) 最適運用を行うリスク過程 $\hat{X}$ について, ruin probability の評価

結果 (1)

(1) Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式：

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\pi\in\mathbb{R}^n}\Bigg[V_t + \frac{1}{2}|\sigma^\top\pi|^2 V_{xx} + \pi^\top\sigma a^\top V_{xy} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(aa^\top V_{yy}\right)\\
&\qquad + \left\{c + \pi^\top(\mu(y) - r\mathbf{1}) + rx\right\} V_x + b(y)^\top V_y\\
&\qquad + \lambda\int_0^\infty \{V(t,x-z,y) - V(t,x,y)\}\,\nu(dx)\Bigg] = 0,\\
&V(T,x,y) = u(x)
\end{aligned}
$$

を明示的に解いて（常微分方程式の系に落とし込むことができる），効用最大化問題の解の明示的な表現が得られる.

$$
\hat{\pi}_t := e^{-r(T-t)}\left[\frac{1}{\alpha}(\sigma\sigma^\top)^{-1}\{\mu(Y_t) - r\mathbf{1}\} - (\sigma\sigma^\top)^{-1}(\sigma a^\top)\{P(t)Y_t + p(t)\}\right]
$$

: 最適運用戦略

結果 (2)

(2) 効用無差別プレミアム：

$$\hat{c} = c - \frac{r}{(e^{rT} - 1)} v(y), \quad v(y) := \frac{1}{2} y^\top P(0) y + p(0)^\top y + \rho(0) (\geq 0)$$

- 危険資産への最適運用を行うことで，保険料減額が可能になる．

(3) ruin probability: 例えば $\sigma a^\top \equiv 0$, $U_i \sim \mathrm{Exp}(\beta)$, $c > \lambda\beta = \lambda\mathbb{E}[U_i]$,
$1/2\beta \leq \alpha \leq 1/\beta$ のとき

$$\psi(T, x) = \mathbb{P}(\tau_x \leq T) \leq \min \left\{ e^{-\hat{R}x}, \exp\left(\inf_{\gamma \in [\hat{R}, 1/\beta)} (\kappa(\gamma)T - \gamma x) \right) \right\}$$

$\hat{R} := \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{\lambda\beta}{c}\right)$, $\kappa(\gamma) := \lambda\{M(\gamma) - 1\} - \gamma c$, $M(\gamma) = \mathbb{E}[e^{\gamma U_i}]$

- 危険資産への最適運用を行うことで，（ある状況下では）ruin probability の減少が実現できる．

結論

- 保険数理でも金融数理でも「期待値」を求めることが重要である.
- 保険数理も金融数理も「大人」の学問分野である.
- 長期予測は難しい.
- 保険数理も金融数理も面白い.